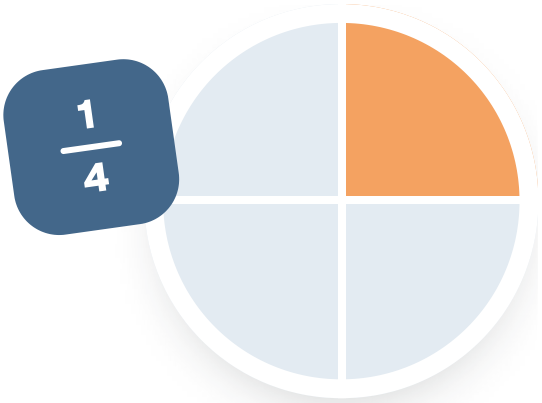
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 13

Abstände und Spiegelungen im Raum

Erklärungen, 30 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich berechne Mittelpunkte und spiegele Punkte an Koordinatenebenen.
- Ich spiegele Punkte an Ebenen mit Lotgerade und Lotfußpunkt.
- Ich berechne Abstände von Punkt zu Ebene und Punkt zu Gerade (Leistungskurs).
- Ich bestimme den Abstand windschiefer Geraden und paralleler Ebenen (Leistungskurs).

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-13/mathe/abstaende-und-spiegelungen/symmetrien-in-koerpern-nutzen

Kurz erklärt

Merksatz: Mittelpunkt: $M = \frac{1}{2}(A + B)$. Spiegelpunkt: $P' = 2F - P$, wobei F der Lotfußpunkt ist.

Abstandsformeln

Objekte	Formel
Punkt–Ebene	$d = \lvert n \circ P - d_0 \rvert : \lvert n \rvert$
Punkt–Gerade	$t = (w \circ u) : (u \circ u)$, $d = \lvert PF \rvert$
parallele Ebenen	$d = \lvert d_2 - d_1 \rvert : \lvert n \rvert$ (derselbe Normalenvektor n in beiden Gleichungen)
windschiefe Geraden	$d = \lvert n \circ w \rvert : \lvert n \rvert$ mit $n \circ u = 0$ und $n \circ v = 0$

Punkt an Ebene spiegeln

1. Lotgerade durch P mit Richtung n aufstellen.
2. Gerade in die Ebene einsetzen, t bestimmen, F berechnen.
3. $P' = 2F - P$. Probe über den Mittelpunkt.

Typischer Fehler: Der Lotfußpunkt F ist nicht der Spiegelpunkt. F liegt in der Ebene, P' liegt doppelt so weit von P entfernt.

●○○ Basis

Mittelpunkte und Spiegelungen an Koordinatenebenen

1 Bestimme die Koordinaten des Mittelpunkts.

a) A(2 | 0 | 4) und B(6 | 4 | 0): M(_____ | _____ | _____)

b) A(1 | −3 | 5) und B(7 | 1 | −1): die x_2-Koordinate von M ist _____

c) Ein Quader hat gegenüberliegende Ecken O(0 | 0 | 0) und G(6 | 4 | 2). Die x_3-Koordinate seines Mittelpunkts ist _____

2 Spiegele an einer Koordinatenebene.

a) P(3 | −2 | 5) an der x_1x_2-Ebene: P′(3 | −2 | _____)

b) P(1 | 2 | 3) an der x_1x_3-Ebene: P′(1 | _____ | 3)

c) P(4 | 1 | −2) an der x_2x_3-Ebene: P′(_____ | 1 | −2)

3 Wähle die richtige Aussage.

a) Ein Quader mit drei verschiedenen Kantenlängen hat _____ Symmetrieebenen. ☐ 9 ☐ 3

b) Ein Würfel hat _____ Symmetrieebenen. ☐ 9 ☐ 3

c) Die Ebene, an der A auf B gespiegelt wird, ist die _____. ☐ **Ebene durch A und B** ☐ **Mittelsenkrechtenebene**

●●○ Standard

Punkte an Ebenen spiegeln

4 **Spiegele P(1 | 2 | 0) an E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$. Die Lotgerade ist x = (1 | 2 | 0) + t · (2 | –1 | 2).**

a) Einsetzen gibt 9t = 9, also t = _____. Der Lotfußpunkt ist F(_____ | _____ | _____)

b) Der Spiegelpunkt ist P′(_____ | _____ | _____)

5 **Spiegele an einer Ebene parallel zu einer Koordinatenebene.**

a) A(3 | –1 | 2) an der Ebene $x_1 = 5$: x_1-Koordinate von A′ = _____

b) P(1 | 1 | 1) an der Ebene $x_3 = 4$: x_3-Koordinate von P′ = _____

6 **Wähle die richtige Aussage.**

a) Die Lotgerade hat als Richtungsvektor den _____ der Ebene. ☐ **Stützvektor** ☐ **Normalenvektor**

b) Der Lotfußpunkt F liegt _____ der Strecke PP′. ☐ **in der Mitte** ☐ **am Ende**

7 **Antworte mit einem Satz.**

a) Prüfe, ob der Mittelpunkt von P(1 | 2 | 0) und P′(5 | 0 | 4) in der Ebene E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$ liegt.

Antwort:

8 **Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.**

a) Der Spiegelpunkt P′ ist der Lotfußpunkt F. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

b) Der Spiegelpunkt liegt auf der Lotgeraden von P. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

c) Liegt P in der Ebene, dann ist P′ = P. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

●●● Plus

Abstände (vor allem für den Leistungskurs)

9 Berechne den Abstand Punkt–Ebene mit $d = |n \circ P - d_0| : |n|$.

a) E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$, P(3 | 0 | 4). d = _____

b) E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 14$, P(1 | 2 | 0). d = _____

c) E: $3x_1 + 4x_2 = 10$, P(4 | 2 | 0). d = _____

d) E: $x_3 = 5$, P(2 | 1 | –3). d = _____

10 Abstand Punkt–Gerade: g: x = (1 | 0 | 2) + t · (2 | 1 | 2), P(4 | 3 | 2).

a) $t = (w \circ u) : (u \circ u) = 9 : 9 =$ _____

b) Der Abstand ist d = _____

c) g ist die x_1-Achse, P(5 | 3 | 4). d = _____

11 Parallele und windschiefe Objekte.

a) E_1: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$ und E_2: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 10$. Abstand: _____

b) g und h sind windschief mit n = (2 | 1 | 2) und w = (3 | 0 | 3). Abstand: _____

12 Antworte mit einem Satz.

a) g hat die Richtung u = (1 | 0 | –1), h die Richtung v = (1 | –2 | 0). Bestimme einen Normalenvektor n = (2 | b | c).

Antwort:

b) Begründe, warum der Betrag in $|n \circ P - d_0|$ steht.

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich berechne Mittelpunkte und spiegele Punkte an Koordinatenebenen.	☐	☐	☐
Ich spiegele Punkte an Ebenen mit Lotgerade und Lotfußpunkt.	☐	☐	☐
Ich berechne Abstände von Punkt zu Ebene und Punkt zu Gerade (Leistungskurs).	☐	☐	☐
Ich bestimme den Abstand windschiefer Geraden und paralleler Ebenen (Leistungskurs).	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Mittelpunkte und Spiegelungen an Koordinatenebenen

1 Bestimme die Koordinaten des Mittelpunkts.

a) **A(2 | 0 | 4) und B(6 | 4 | 0): M(4 | 2 | 2)**

→ Mittelwerte der Koordinaten.

b) **A(1 | −3 | 5) und B(7 | 1 | −1): die x_2-Koordinate von M ist −1**

→ (−3 + 1) : 2 = −1.

c) **Ein Quader hat gegenüberliegende Ecken O(0 | 0 | 0) und G(6 | 4 | 2). Die x_3-Koordinate seines Mittelpunkts ist 1**

→ (0 + 2) : 2 = 1.

2 Spiegele an einer Koordinatenebene.

a) **P(3 | −2 | 5) an der x_1x_2-Ebene: P′(3 | −2 | −5)**

→ Nur x_3 wechselt das Vorzeichen.

b) **P(1 | 2 | 3) an der x_1x_3-Ebene: P′(1 | −2 | 3)**

→ Nur x_2 wechselt das Vorzeichen.

c) **P(4 | 1 | −2) an der x_2x_3-Ebene: P′(−4 | 1 | −2)**

→ Nur x_1 wechselt das Vorzeichen.

3 Wähle die richtige Aussage.

a) **3**

→ Je eine Ebene parallel zu einem Seitenflächenpaar.

b) **9**

→ 3 parallel zu den Seitenflächen und 6 durch gegenüberliegende Kanten.

c) **Mittelsenkrechtenebene**

→ Sie geht durch den Mittelpunkt und steht senkrecht auf AB.

●●○ Standard: Punkte an Ebenen spiegeln

4 Spiegele P(1 | 2 | 0) an E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$. Die Lotgerade ist $x = (1 | 2 | 0) + t \cdot (2 | -1 | 2)$.

a) **Einsetzen gibt 9t = 9, also t = 1. Der Lotfußpunkt ist F(3 | 1 | 2)**

→ Einsetzen: $2(1 + 2t) - (2 - t) + 2 \cdot 2t = 9t = 9$.

→ F = (1 + 2 | 2 − 1 | 0 + 2) = (3 | 1 | 2).

b) **Der Spiegelpunkt ist P′(5 | 0 | 4)**

→ P′ = 2F − P = (6 − 1 | 2 − 2 | 4 − 0) = (5 | 0 | 4).

5 **Spiegele an einer Ebene parallel zu einer Koordinatenebene.**

a) **A(3 | –1 | 2) an der Ebene $x_1 = 5$: x_1-Koordinate von A′ = 7**

→ $2 \cdot 5 - 3 = 7$.

b) **P(1 | 1 | 1) an der Ebene $x_3 = 4$: x_3-Koordinate von P′ = 7**

→ $2 \cdot 4 - 1 = 7$.

6 **Wähle die richtige Aussage.**

a) **Normalenvektor**

→ Das Lot steht senkrecht auf der Ebene.

b) **in der Mitte**

→ P und P′ haben gleichen Abstand zur Ebene.

7 **Antworte mit einem Satz.**

a) **Der Mittelpunkt M(3 | 1 | 2) liegt in E, denn 6 – 1 + 4 = 9.**

→ M = ((1 + 5) : 2 | (2 + 0) : 2 | (0 + 4) : 2) = (3 | 1 | 2).

→ In E einsetzen: $2 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot 2 = 9$.

8 **Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.**

a) **Stimmt nicht. Richtig: Der Spiegelpunkt ist P′ = 2F – P. Der Lotfußpunkt liegt in der Ebene.**

b) **Stimmt.**

c) **Stimmt.**

●●● Plus: Abstände (vor allem für den Leistungskurs)

9 **Berechne den Abstand Punkt–Ebene mit $d = |n \circ P - d_0| : |n|$.**

a) **E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$, P(3 | 0 | 4). d = 2**

→ $|n| = 3$, $n \circ P = 10$, $|10 - 4| : 3 = 2$.

b) **E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 14$, P(1 | 2 | 0). d = 3**

→ $n \circ P = 5$, $|5 - 14| : 3 = 3$.

c) **E: $3x_1 + 4x_2 = 10$, P(4 | 2 | 0). d = 2**

→ $|n| = 5$, $n \circ P = 20$, $|20 - 10| : 5 = 2$.

d) **E: $x_3 = 5$, P(2 | 1 | –3). d = 8**

→ $|-3 - 5| : 1 = 8$.

10 **Abstand Punkt–Gerade: g: $x = (1 | 0 | 2) + t \cdot (2 | 1 | 2)$, P(4 | 3 | 2).**

a) **$t = (w \circ u) : (u \circ u) = 9 : 9 = 1$**

→ $w = P - A = (3 | 3 | 0)$, $w \circ u = 9$, $u \circ u = 9$.

b) **Der Abstand ist d = 3**

→ F(3 | 1 | 4), PF = (–1 | –2 | 2), $|PF| = 3$.

c) **g ist die x_1-Achse, P(5 | 3 | 4). d = 5**

→ F(5 | 0 | 0), $|PF| = \sqrt{(9 + 16)} = 5$.

11 Parallele und windschiefe Objekte.

a) **$E_1: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$ und $E_2: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 10$. Abstand: 3**

→ $|10 - 1| : 3 = 3$.

b) **g und h sind windschief mit $n = (2 \mid 1 \mid 2)$ und $w = (3 \mid 0 \mid 3)$. Abstand: 4**

→ $n \circ w = 12$, $12 : 3 = 4$.

12 Antworte mit einem Satz.

a) **$n = (2 \mid 1 \mid 2)$.**

→ $n \circ u = 2 - c = 0$ gibt $c = 2$.

→ $n \circ v = 2 - 2b = 0$ gibt $b = 1$.

b) **Der Zähler kann negativ sein, wenn P auf der anderen Seite der Ebene liegt. Ein Abstand ist aber nie negativ, deshalb nimmt man den Betrag.**

→ Vorzeichen zeigt die Seite der Ebene an.

→ Abstand ≥ 0.