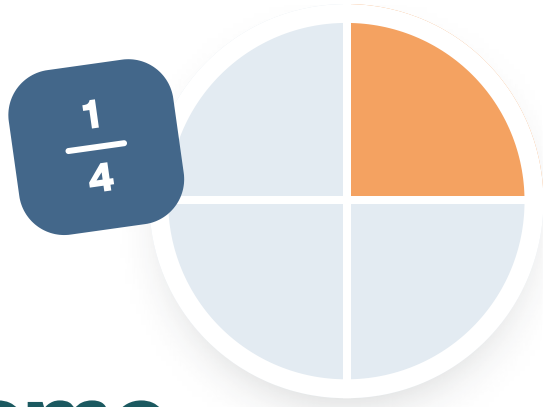
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 12

Extremwertprobleme

Erklärungen, 30 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich erkenne Zielgröße und Nebenbedingung.
- Ich stelle die Zielfunktion auf und gebe den Definitionsbereich an.
- Ich löse Aufgaben zu Flächen, Schachteln und Rändern.
- Ich löse anspruchsvollere Optimierungen (vor allem Leistungskurs).

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-12/mathe/extremwertprobleme/was-ist-ein-extremwertproblem

Kurz erklärt

Merksatz: Schema: Hauptbedingung · Nebenbedingung · Zielfunktion · Definitionsbereich · Extremum ($f' = 0$, Art, Ränder) · Antwortsatz.

Begriffe

Begriff	Bedeutung
Zielgröße	Größe, die maximal oder minimal werden soll
Nebenbedingung	Gleichung, die die Größen verbindet
Zielfunktion	Zielgröße mit nur einer Variablen

Zaun an einer Mauer, 60 m für drei Seiten

1. $a + 2b = 60$, also $a = 60 - 2b$.
2. $A(b) = (60 - 2b) \cdot b = 60b - 2b^2$. Definitionsbereich $0 < b < 30$.
3. $A'(b) = 60 - 4b = 0$ ergibt $b = 15$. $A'' = -4 < 0$: Maximum.
4. Randwerte: A geht gegen 0. Antwort: $b = 15$ m, $a = 30$ m, $A = 450$ m².

Tipp: Schreibe den Definitionsbereich immer auf und vergleiche bei einer Einschränkung die Randwerte.

Typischer Fehler: Das Maximum muss nicht bei $A' = 0$ liegen. Bei einem begrenzten Bereich kann es am Rand liegen.

●○○ Basis

Zielgröße und Nebenbedingung

1 Kreuze an.

a) Die Größe, die am größten werden soll, heißt ☐ **Zielgröße** ☐ **Nebenbedingung**

_____.

b) Die Gleichung, die die Größen verbindet, heißt ☐ **Nebenbedingung** ☐ **Zielgröße**

_____.

c) Nach dem Einsetzen hängt die Zielfunktion von _____ ☐ **zwei** ☐ **einer** Variable(n) ab.

d) Am Ende der Lösung steht ein _____. ☐ **Antwortsatz** ☐ **Gleichungssystem**

2 Ergänze die Nebenbedingung aus dem Umfang.

a) Umfang 20 m: a + b = _____

b) Umfang 36 m: a + b = _____

c) Umfang 50 m, a = 10 m: b = _____ m

3 Rechteck mit festem Umfang: Gib die beste Seite a und den größten Flächeninhalt A an.

a) Umfang 20 m, $A(a) = 10a - a^2$: a = _____ m, A = _____ m^2

b) Umfang 36 m, $A(a) = 18a - a^2$: a = _____ m, A = _____ m^2

c) Umfang 28 m, $A(a) = 14a - a^2$: a = _____ m, A = _____ m^2

●●○ Standard

Flächen, Volumen und Ränder

4 **Zaun für drei Seiten an einer Mauer (b = Tiefe). Gib b und den größten Flächeninhalt an.**

a) 40 m Zaun, $A(b) = 40b - 2b^2$: b = _____ m, A = _____ m^2

b) 80 m Zaun, $A(b) = 80b - 2b^2$: b = _____ m, A = _____ m^2

c) 120 m Zaun, $A(b) = 120b - 2b^2$: b = _____ m, A = _____ m^2

5 **Symmetrisches Rechteck unter $f(x) = c - x^2$ mit $A(u) = 2u \cdot (c - u^2)$. Gib u und den größten Flächeninhalt an.**

a) c = 12, $A'(u) = 24 - 6u^2 = 0$: u = _____, A = _____

b) c = 27, $A'(u) = 54 - 6u^2 = 0$: u = _____, A = _____

c) c = 48, $A'(u) = 96 - 6u^2 = 0$: u = _____, A = _____

6 **Offene Schachtel aus einem Karton der Seite s mit $V(x) = x \cdot (s - 2x)^2$. Gib die beste Höhe x und das größte Volumen an.**

a) s = 12 cm: x = _____ cm, V = _____ cm^3

b) s = 18 cm: x = _____ cm, V = _____ cm^3

c) s = 24 cm: x = _____ cm, V = _____ cm^3

7 Randextrema: Kreuze an.

a) Ein globales Maximum auf einem Intervall kann auch am _____ liegen.

☐ **Rand** ☐ **Wendepunkt**

b) Liegt die Stelle mit $A' = 0$ nicht im Definitionsbereich, ist sie _____.

☐ **unbrauchbar** ☐ **die Lösung**

c) Zum Vergleich braucht man die Funktionswerte an den Rändern und an den Stellen mit _____.

☐ **$f'' = 0$** ☐ **$f' = 0$**

8 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe ihn richtig auf.

a) Bei jedem Rechteck mit Umfang 20 m ist der Flächeninhalt 25 m².

☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

b) Mit der Nebenbedingung ersetzt man eine Variable in der Zielgröße.

☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

c) Bei der Schachtel aus 24 cm Karton hat der Boden die Seitenlänge $24 - x$.

☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

d) Der Definitionsbereich gehört zur Lösung eines Extremwertproblems.

☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

9 Rechne und schreibe das Ergebnis mit Antwortsatz auf.

a) 40 m Zaun für drei Seiten an einer Mauer, die nur 16 m lang ist. Wie groß ist die größte Fläche?

Antwort:

●●● Plus

Anspruchsvolle Optimierungen (vor allem Leistungskurs)

10 **Rechne ohne Hilfsmittel, wenn möglich, und schreibe das Ergebnis auf.**

a) Welche Punkte der Parabel $f(x) = x^2$ liegen dem Punkt $P(0 \mid 2)$ am nächsten? Gib auch den kleinsten Abstand an.

Antwort:

b) Ein Quader hat eine quadratische Grundfläche (Seite a) und die Höhe h. Die Summe aller Kantenlängen ist 60 cm. Bestimme a, h und das größte Volumen.

Antwort:

c) Eine Dose soll 1000 cm^3 fassen und möglichst wenig Material brauchen. Bestimme r und h auf eine Nachkommastelle.

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich erkenne Zielgröße und Nebenbedingung.	☐	☐	☐
Ich stelle die Zielfunktion auf und gebe den Definitionsbereich an.	☐	☐	☐
Ich löse Aufgaben zu Flächen, Schachteln und Rändern.	☐	☐	☐
Ich löse anspruchsvollere Optimierungen (vor allem Leistungskurs).	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Zielgröße und Nebenbedingung

1 **Kreuze an.**

a) **Zielgröße**

→ Die Zielgröße soll maximal oder minimal werden.

b) **Nebenbedingung**

→ Mit ihr ersetzt man eine Variable.

c) **einer**

→ Nur mit einer Variablen kann man $f' = 0$ lösen.

d) **Antwortsatz**

→ Er beantwortet die Frage mit Einheit.

2 **Ergänze die Nebenbedingung aus dem Umfang.**

a) **Umfang 20 m: $a + b = 10$**

b) **Umfang 36 m: $a + b = 18$**

c) **Umfang 50 m, $a = 10$ m: $b = 15$ m**

3 **Rechteck mit festem Umfang: Gib die beste Seite a und den größten Flächeninhalt A an.**

a) **Umfang 20 m, $A(a) = 10a - a^2$: $a = 5$ m, $A = 25$ m²**

b) **Umfang 36 m, $A(a) = 18a - a^2$: $a = 9$ m, $A = 81$ m²**

c) **Umfang 28 m, $A(a) = 14a - a^2$: $a = 7$ m, $A = 49$ m²**

●●○ Standard: Flächen, Volumen und Ränder

4 **Zaun für drei Seiten an einer Mauer (b = Tiefe). Gib b und den größten Flächeninhalt an.**

a) **40 m Zaun, $A(b) = 40b - 2b^2$: $b = 10$ m, $A = 200$ m²**

b) **80 m Zaun, $A(b) = 80b - 2b^2$: $b = 20$ m, $A = 800$ m²**

c) **120 m Zaun, $A(b) = 120b - 2b^2$: $b = 30$ m, $A = 1800$ m²**

5 **Symmetrisches Rechteck unter $f(x) = c - x^2$ mit $A(u) = 2u \cdot (c - u^2)$. Gib u und den größten Flächeninhalt an.**

a) **$c = 12$, $A'(u) = 24 - 6u^2 = 0$: $u = 2$, $A = 32$**

b) **$c = 27$, $A'(u) = 54 - 6u^2 = 0$: $u = 3$, $A = 108$**

c) **$c = 48$, $A'(u) = 96 - 6u^2 = 0$: $u = 4$, $A = 256$**

6 **Offene Schachtel aus einem Karton der Seite s mit $V(x) = x \cdot (s - 2x)^2$. Gib die beste Höhe x und das größte Volumen an.**

a) **$s = 12$ cm: $x = 2$ cm, $V = 128$ cm³**

b) **$s = 18$ cm: $x = 3$ cm, $V = 432$ cm³**

c) **$s = 24$ cm: $x = 4$ cm, $V = 1024$ cm³**

7 Randextrema: Kreuze an.

a) Rand

→ Dort ist f′ nicht unbedingt null.

b) unbrauchbar

→ Nur Werte im erlaubten Bereich zählen.

c) f′ = 0

→ Das sind die Kandidaten für Extrema.

8 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe ihn richtig auf.

a) Stimmt nicht. Richtig: Nur das Quadrat mit a = 5 hat 25 m². Andere Rechtecke haben weniger.

b) Stimmt.

c) Stimmt nicht. Richtig: Der Boden hat die Seitenlänge 24 – 2x.

d) Stimmt.

9 Rechne und schreibe das Ergebnis mit Antwortsatz auf.

a) 192 m² bei b = 12 m und a = 16 m.

→ a + 2b = 40, also a = 40 – 2b. Mauer 16 m: 40 – 2b ≤ 16, also b ≥ 12.

→ A(b) = 40b – 2b². Die Stelle b = 10 gehört nicht zum Bereich 12 ≤ b < 20.

→ Im Bereich ist A′(b) = 40 – 4b < 0. Maximum am Rand: A(12) = 480 – 288 = 192.

●●● Plus: Anspruchsvolle Optimierungen (vor allem Leistungskurs)

10 **Rechne ohne Hilfsmittel, wenn möglich, und schreibe das Ergebnis auf.**

a) **Q(±√1,5 | 1,5), Abstand √1,75 ≈ 1,32.**

→ $D(x) = x^2 + (x^2 - 2)^2 = x^4 - 3x^2 + 4$.

→ $D'(x) = 4x^3 - 6x = 2x \cdot (2x^2 - 3) = 0$ ergibt $x = 0$ oder $x^2 = 1{,}5$.

→ $D(0) = 4$ und $D(\sqrt{1{,}5}) = 2{,}25 - 4{,}5 + 4 = 1{,}75$. Das kleinere D gehört zu $x^2 = 1{,}5$.

→ Abstand: $\sqrt{1{,}75} \approx 1{,}32$.

b) **a = 5 cm, h = 5 cm, V = 125 cm³ (ein Würfel).**

→ $8a + 4h = 60$, also $h = 15 - 2a$.

→ $V(a) = a^2 \cdot (15 - 2a) = 15a^2 - 2a^3$.

→ $V'(a) = 30a - 6a^2 = 6a \cdot (5 - a) = 0$ ergibt $a = 5$. Dann ist $h = 5$.

→ $V(5) = 125$.

c) **r ≈ 5,4 cm, h ≈ 10,8 cm.**

→ $h = 1000/(\pi \cdot r^2)$. $O(r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2000/r$.

→ $O'(r) = 4\pi r - 2000/r^2$ (Ableitung von $1/r$: $-1/r^2$). $O'(r) = 0$ ergibt $r^3 = 500/\pi \approx 159{,}15$.

→ $r \approx 5{,}42$ cm. $h = 1000/(\pi \cdot 5{,}42^2) \approx 10{,}84$ cm.

→ Die Dose ist etwa so hoch wie ihr Durchmesser ($h \approx 2r$).