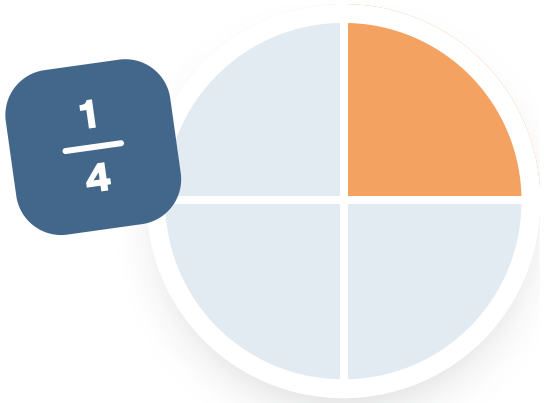
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 11

Probleme mit ganzrationalen Funktionen lösen

Erklärungen, 38 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich lese Eigenschaften aus Term, Graph und Tabelle ab.
- Ich untersuche eine Funktion planvoll.
- Ich deute f, f′ und besondere Stellen im Sachzusammenhang und bestimme größte und kleinste Werte.
- Ich übersetze Eigenschaften in Gleichungen und prüfe Ergebnisse und Modelle.

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-11/mathe/ganzrationale-funktionen-anwenden/welche-darstellung

Kurz erklärt

Merksatz: Nullstellen: Produktform. y-Achsenabschnitt: f(0). Größter und kleinster Wert auf einem Intervall: Kandidaten (f′ = 0) und Randwerte vergleichen. Ergebnisse auf Bereich, Vorzeichen und Einheit prüfen.

Darstellungen

Darstellung	gut erkennbar
Summenform	y-Achsenabschnitt, Symmetrie
Produktform	Nullstellen
Graph	Verlauf, Extrema
Wertetabelle	genaue Werte

Größter und kleinster Wert

1. Modell: $P(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 30$ auf $0 \leq t \leq 8$.
2. $P'(t) = 3 \cdot (t - 1) \cdot (t - 5) = 0$ ergibt $t = 1$ oder $t = 5$.
3. $P(0) = 30$, $P(1) = 37$, $P(5) = 5$, $P(8) = 86$.
4. Größter Wert 86 bei $t = 8$ (Rand), kleinster Wert 5 bei $t = 5$.

Tipp: Schreibe zu jedem Ergebnis einen Antwortsatz mit Zahl, Einheit und Zeitpunkt. Nenne auch den Bereich, in dem das Modell gilt.

Typischer Fehler: Wer nur die Stellen mit f′ = 0 vergleicht, übersieht Maxima und Minima am Rand. Und h′(1) = 9 heißt nicht „Füllstand 9 cm“, sondern „Zunahme 9 cm pro Stunde“.

●○○ Basis

Darstellungen lesen

1 Gib beide Nullstellen an, die kleinere zuerst.

a) $f(x) = (x - 2) \cdot (x + 3)$: $x =$ _____ und $x =$ _____

b) $f(x) = (x + 1) \cdot (x - 4)$: $x =$ _____ und $x =$ _____

c) $f(x) = 2 \cdot (x - 5) \cdot (x + 5)$: $x =$ _____ und $x =$ _____

d) $f(x) = x \cdot (x - 6)$: $x =$ _____ und $x =$ _____

2 Gib den y-Achsenabschnitt f(0) an.

a) $f(x) = x^2 + 5x - 3$: $f(0) =$ _____

b) $f(x) = 2x^3 - x + 7$: $f(0) =$ _____

c) $f(x) = (x - 2) \cdot (x + 3)$: $f(0) =$ _____

d) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$: $f(0) =$ _____

3 **Kreuze an.**

a) Kommen nur gerade Exponenten vor (x^4, x^2, eine Zahl), ist der Graph _____ zur y-Achse.

☐ **punktsymmetrisch** ☐ **achsensymmetrisch**

b) Kommen nur ungerade Exponenten vor (x^3, x), ist der Graph _____ zum Ursprung.

☐ **achsensymmetrisch** ☐ **punktsymmetrisch**

c) Nullstellen liest man am besten in der _____ Form ab.

☐ **faktorisierten** ☐ **ausmultiplizierten**

d) Den y-Achsenabschnitt liest man in der _____ Form direkt ab.

☐ **faktorisierten** ☐ **ausmultiplizierten**

●●○ Standard

Sachkontexte, Werte und Modelle

4 **Modell: Füllstand $h(t) = -t^3 + 6t^2$ in cm, t in Stunden, $h'(t) = -3t^2 + 12t$. Rechne und gib das Ergebnis an.**

a) $h(2) =$ _____ (in cm)

b) $h'(1) =$ _____ (in cm pro Stunde)

c) $h'(5) =$ _____ (in cm pro Stunde)

d) Höchster Stand bei t = _____ Stunden

5 **Modell: Pegel $P(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 30$ in cm über Normal, t in Tagen, $0 \leq t \leq 8$. Berechne.**

a) $P(0) =$ _____

b) $P(1) =$ _____

c) $P(5) =$ _____

d) $P(8) =$ _____

6 **Modell: $P(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 30$ auf $0 \leq t \leq 8$ mit $P(0) = 30$, $P(1) = 37$, $P(5) = 5$, $P(8) = 86$. Kreuze an.**

a) Das globale Maximum (86 bei t = 8) liegt _____ des Intervalls. ☐ **am Rand** ☐ **im Inneren**

b) Das globale Minimum (5 bei t = 5) liegt _____ des Intervalls. ☐ **im Inneren** ☐ **am Rand**

c) Die Lösung $t = -2$ ist bei $t \geq 0$ _____. ☐ **unbrauchbar** ☐ **gültig**

7 **Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe ihn richtig auf.**

a) Ist h in cm und t in Stunden, hat h′ die Einheit cm pro Stunde. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

b) Wo $h'(t) = 0$ ist, liegt immer der höchste Stand. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

c) Bei $h(7) = -49$ cm ist das Modell für $t = 7$ nicht geeignet. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

d) Die stärkste Zunahme liegt bei der Nullstelle von h′. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

e) Zu jeder Untersuchung gehört die Berechnung aller Nullstellen. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

●●● Plus

Gleichungen aufstellen und Modelle bewerten

8 Schreibe die Aussage als Gleichung.

a) Der Graph geht durch P(2 | 5): f(_____) = _____

b) Hochpunkt bei x = 1: f′(_____) = _____

c) Wendepunkt bei x = 3: f″(_____) = _____

d) Steigung 4 bei x = 2: f′(_____) = _____

9 Bestimme die unbekannte Zahl.

a) $f(x) = x^2 + p \cdot x + 1$ geht durch P(2 | 7): p = _____

b) $f(x) = x^2 + p \cdot x$ hat bei x = 3 einen Tiefpunkt: p = _____

c) $f(x) = x^3 + a \cdot x$ geht durch P(1 | 4): a = _____

10 Rechne ohne Hilfsmittel und schreibe einen Antwortsatz.

a) Gesucht ist $f(x) = x^2 + p \cdot x + q$. Der Graph geht durch P(1 | 2) und hat bei x = 2 einen Tiefpunkt. Bestimme p und q.

Antwort:

b) Modell: Pegel $P(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 30$ in cm über Normal, t in Tagen, $0 \le t \le 8$. Wann ist der Pegel am niedrigsten, und wie niedrig ist er?

Antwort:

c) Modell: Füllstand $h(t) = -t^3 + 6t^2$ in cm, t in Stunden. Für welche t ist $h(t) \ge 0$? Bewerte $h(8)$.

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich lese Eigenschaften aus Term, Graph und Tabelle ab.	☐	☐	☐
Ich untersuche eine Funktion planvoll.	☐	☐	☐
Ich deute f, f′ und besondere Stellen im Sachzusammenhang und bestimme größte und kleinste Werte.	☐	☐	☐
Ich übersetze Eigenschaften in Gleichungen und prüfe Ergebnisse und Modelle.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Darstellungen lesen

1 **Gib beide Nullstellen an, die kleinere zuerst.**

a) $f(x) = (x - 2) \cdot (x + 3)$: $x = -3$ und $x = 2$

b) $f(x) = (x + 1) \cdot (x - 4)$: $x = -1$ und $x = 4$

c) $f(x) = 2 \cdot (x - 5) \cdot (x + 5)$: $x = -5$ und $x = 5$

d) $f(x) = x \cdot (x - 6)$: $x = 0$ und $x = 6$

2 **Gib den y-Achsenabschnitt $f(0)$ an.**

a) $f(x) = x^2 + 5x - 3$: $f(0) = -3$

b) $f(x) = 2x^3 - x + 7$: $f(0) = 7$

c) $f(x) = (x - 2) \cdot (x + 3)$: $f(0) = -6$

d) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$: $f(0) = 1$

3 **Kreuze an.**

a) **achsensymmetrisch**

→ Es gilt $f(-x) = f(x)$.

b) **punktsymmetrisch**

→ Es gilt $f(-x) = -f(x)$.

c) **faktorisierten**

→ Ein Produkt ist null, wenn ein Faktor null ist.

d) **ausmultiplizierten**

→ Die Zahl ohne x ist $f(0)$.

●●○ Standard: Sachkontexte, Werte und Modelle

4 **Modell: Füllstand $h(t) = -t^3 + 6t^2$ in cm, t in Stunden, $h'(t) = -3t^2 + 12t$. Rechne und gib das Ergebnis an.**

a) $h(2) = 16$ (in cm)

b) $h'(1) = 9$ (in cm pro Stunde)

c) $h'(5) = -15$ (in cm pro Stunde)

d) Höchster Stand bei $t = 4$ Stunden

5 **Modell: Pegel $P(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 30$ in cm über Normal, t in Tagen, $0 \le t \le 8$. Berechne.**

a) $P(0) = 30$

b) $P(1) = 37$

c) $P(5) = 5$

d) $P(8) = 86$

6 **Modell: $P(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 30$ auf $0 \le t \le 8$ mit $P(0) = 30$, $P(1) = 37$, $P(5) = 5$, $P(8) = 86$. Kreuze an.**

a) **am Rand**

→ $t = 8$ ist der rechte Rand.

b) **im Inneren**

→ $t = 5$ liegt zwischen 0 und 8.

c) **unbrauchbar**

→ Negative Zeiten gibt es im Modell nicht.

7 **Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe ihn richtig auf.**

a) **Stimmt.**

b) **Stimmt nicht. Richtig: $h'(t) = 0$ liefert nur Kandidaten. Man prüft die Art und vergleicht mit den Randwerten.**

c) **Stimmt.**

d) **Stimmt nicht. Richtig: Die stärkste Zunahme liegt bei der Wendestelle von h, also bei der Nullstelle von h''.**

e) **Stimmt nicht. Richtig: Man rechnet nur, was die Frage verlangt.**

●●● Plus: Gleichungen aufstellen und Modelle bewerten

8 **Schreibe die Aussage als Gleichung.**

a) **Der Graph geht durch $P(2 \mid 5)$: $f(2) = 5$**

b) **Hochpunkt bei $x = 1$: $f'(1) = 0$**

c) **Wendepunkt bei $x = 3$: $f''(3) = 0$**

d) **Steigung 4 bei $x = 2$: $f'(2) = 4$**

9 **Bestimme die unbekannte Zahl.**

a) **$f(x) = x^2 + p \cdot x + 1$ geht durch $P(2 \mid 7)$: $p = 1$**

b) **$f(x) = x^2 + p \cdot x$ hat bei $x = 3$ einen Tiefpunkt: $p = -6$**

c) **$f(x) = x^3 + a \cdot x$ geht durch $P(1 \mid 4)$: $a = 3$**

10 **Rechne ohne Hilfsmittel und schreibe einen Antwortsatz.**

a) **$p = -4$ und $q = 5$, also $f(x) = x^2 - 4x + 5$**

→ $f'(x) = 2x + p$. Tiefpunkt bei $x = 2$: $f'(2) = 0$, also $4 + p = 0$ und $p = -4$.

→ $f(1) = 2$: $1 - 4 + q = 2$, also $q = 5$.

→ Probe: $f(2) = 4 - 8 + 5 = 1$, $T(2 \mid 1)$.

b) **Nach 5 Tagen mit 5 cm.**

→ $P'(t) = 3t^2 - 18t + 15 = 3 \cdot (t - 1) \cdot (t - 5)$. Kandidaten: $t = 1$ und $t = 5$.

→ $P(0) = 30$, $P(1) = 37$, $P(5) = 5$, $P(8) = 86$.

→ Der kleinste Wert ist 5 bei $t = 5$.

c) **$h(t) \geq 0$ gilt für $t \leq 6$. $h(8) = -128$ ist im Sachzusammenhang unmöglich.**

→ $h(t) = t^2 \cdot (6 - t)$. Der Faktor t^2 ist nie negativ, also gilt $h(t) \geq 0$ genau für $t \leq 6$.

→ $h(8) = -512 + 384 = -128$.

→ Ein negativer Füllstand ist unmöglich. Das Modell gilt nur für $0 \leq t \leq 6$.