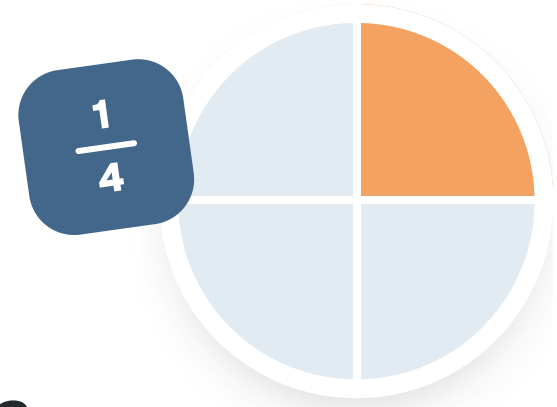
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 11

Geraden im Raum

Erklärungen, 45 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich stelle Geraden und Strecken in Parameterform dar.
- Ich deute Parameter im Sachkontext.
- Ich bestimme die Lage zweier Geraden und berechne Schnittpunkte.
- Ich nutze digitale Werkzeuge sinnvoll und prüfe ihre Ergebnisse.

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-11/mathe/geraden-im-raum/geraden-in-parameterform

Kurz erklärt

Merksatz: Gerade: x = Stützvektor + t · Richtungsvektor. Strecke AB: $0 \leq t \leq 1$. Lage: erst Richtungsvektoren vergleichen, dann Stützpunkt prüfen oder g = h lösen.

Die vier Lagen

Lage	Richtungsvektoren	gemeinsame Punkte
identisch	kollinear	alle
echt parallel	kollinear	keiner
schneidend	nicht kollinear	genau einer
windschief	nicht kollinear	keiner

Punktprobe

1. g: x = (1 | 2 | 3) + t · (2 | –1 | 4), P(7 | –1 | 15).
2. 1 + 2t = 7 ergibt t = 3.
3. 2 – t = –1 ergibt t = 3.
4. 3 + 4t = 15 ergibt t = 3. P liegt auf g.

Tipp: Löse bei Schnittproblemen zuerst die einfachste Gleichung und prüfe das Ergebnis immer mit der dritten.

Typischer Fehler: Aus „kein Schnittpunkt“ folgt nicht „parallel“. Im Raum können Geraden windschief sein.

●○○ Basis

Geraden, Richtungsvektoren und Punktprobe

1 **Gegeben ist g: x = (1 | 2 | 3) + t · (2 | –1 | 4). Berechne den Punkt für den Parameterwert t.**

a) t = 0: (_____ | _____ | _____)

b) t = 1: (_____ | _____ | _____)

c) t = 2: (_____ | _____ | _____)

d) t = –1: (_____ | _____ | _____)

2 **Berechne den Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$.**

a) A(1 | 2 | 3), B(4 | 6 | 9): $\overrightarrow{AB}$ = (_____ | _____ | _____)

b) A(0 | 1 | 2), B(2 | 5 | 8): $\overrightarrow{AB}$ = (_____ | _____ | _____)

c) A(–1 | 0 | 4), B(3 | –2 | 1): $\overrightarrow{AB}$ = (_____ | _____ | _____)

3 **Mache die Punktprobe für g: x = (1 | 2 | 3) + t · (2 | –1 | 4).**

a) Der Punkt P(7 | –1 | 15) liegt _____ der Geraden g. ☐ **nicht auf** ☐ **auf**

b) Der Punkt P(5 | 1 | 10) liegt _____ der Geraden g. ☐ **auf** ☐ **nicht auf**

c) Der Punkt P(–1 | 3 | –1) liegt _____ der Geraden g. ☐ **auf** ☐ **nicht auf**

d) Der Punkt P(3 | 1 | 8) liegt _____ der Geraden g. ☐ **auf** ☐ **nicht auf**

4 **Strecke von A(0 | 0 | 0) nach B(6 | 3 | 9).**

a) Für t = $\frac{1}{3}$ ist der Punkt (_____ | _____ | _____).

b) Für t = 0,5 ist der Punkt (_____ | _____ | _____).

●●○ Standard

Strecken, Sachkontext, Lage und Schnittpunkt

5 **Strecke von A(1 | 2 | 3) nach B(5 | –2 | 7). Gib den Punkt an.**

a) t = 0,25: (_____ | _____ | _____)

b) t = 0,5: (_____ | _____ | _____)

c) t = 0,75: (_____ | _____ | _____)

6 **Liegt der Punkt zum Parameterwert auf der Strecke AB?**

a) t = 0,5: Der Punkt liegt _____ der Strecke. ☐ **nicht auf** ☐ **auf**

b) t = 1,5: Der Punkt liegt _____ der Strecke. ☐ **nicht auf** ☐ **auf**

c) t = –0,2: Der Punkt liegt _____ der Strecke. ☐ **nicht auf** ☐ **auf**

d) t = 1: Der Punkt liegt _____ der Strecke. ☐ **auf** ☐ **nicht auf**

7 **Modell: x = (10 | 20 | 2) + t · (4 | 0 | 3), t in Sekunden, Koordinaten in Metern.**

a) Nach 2 s ist die Höhe _____ m.

b) Die Höhe 17 m wird nach _____ s erreicht.

c) Die Koordinate x_1 = 50 wird nach _____ s erreicht.

d) Das Tempo ist _____ m/s.

8 **Bestimme den Faktor k.**

a) $(2 \mid 4 \mid -2) = _____ \cdot (1 \mid 2 \mid -1)$

b) $(-3 \mid 6 \mid -9) = _____ \cdot (1 \mid -2 \mid 3)$

c) $(1{,}5 \mid 3 \mid 4{,}5) = _____ \cdot (1 \mid 2 \mid 3)$

9 **Bestimme die Lage der Geraden g und h.**

a) g: x = (0 | 0 | 0) + t · (1 | 2 | 3) und h: x = (2 | 4 | 6) + s · (1 | 2 | 3). Die Geraden sind _____.

☐ **windschief** ☐ **identisch** ☐ **echt parallel** ☐ **schneidend**

b) g: x = (0 | 0 | 0) + t · (1 | 2 | 3) und h: x = (1 | 0 | 0) + s · (2 | 4 | 6). Die Geraden sind _____.

☐ **schneidend** ☐ **windschief** ☐ **identisch** ☐ **echt parallel**

c) g: x = (0 | 0 | 0) + t · (1 | 0 | 0) und h: x = (0 | 1 | 0) + s · (0 | 1 | 0). Die Geraden sind _____.

☐ **windschief** ☐ **identisch** ☐ **echt parallel** ☐ **schneidend**

d) g: x = (0 | 0 | 0) + t · (1 | 0 | 0) und h: x = (0 | 1 | 1) + s · (0 | 1 | 0). Die Geraden sind _____.

☐ **schneidend** ☐ **windschief** ☐ **identisch** ☐ **echt parallel**

10 **Berechne t, s und den Schnittpunkt.**

a) g: x = (2 | 1 | 0) + t · (1 | 1 | 2), h: x = (0 | 3 | 4) + s · (4 | 0 | 0): t = _____, s = _____, Schnittpunkt S(_____ | _____ | _____)

b) g: x = (1 | 0 | 2) + t · (2 | 1 | 1), h: x = (4 | 2 | 2) + s · (1 | 0 | 2): t = _____, s = _____, Schnittpunkt S(_____ | _____ | _____)

c) g: x = (0 | 1 | 0) + t · (1 | 1 | 2), h: x = (1 | 2 | 3) + s · (1 | 1 | 1): t = _____, s = _____, Schnittpunkt S(_____ | _____ | _____)

11 **Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe ihn richtig auf.**

a) Zwei Geraden im Raum, die sich nicht schneiden, sind immer parallel. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

b) Für t = 0 erhält man den Stützpunkt der Geraden. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

c) Die Strecke AB beschreibt man mit dem Parameterbereich t ≥ 0. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

d) Liefert die dritte Gleichung des Systems einen Widerspruch, haben die Geraden keinen Schnittpunkt. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

e) Der Richtungsvektor einer Geraden darf der Nullvektor sein. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

●●● Plus

Probleme lösen

12 **Teilpunkt einer Strecke. Der Punkt T teilt die Strecke von A(0 | 0 | 0) nach B(8 | 4 | 12) im Verhältnis 1 : 3 (vom Anfang aus gerechnet).**

a) Der Parameterwert ist t = _____ .

b) Der Punkt ist T(_____ | _____ | _____).

13 **Rechne und schreibe einen Antwortsatz.**

a) Untersuche die Lage von g: x = (1 | 2 | 3) + t · (1 | 2 | –1) und h: x = (0 | 3 | 2) + s · (2 | 1 | 1).

Antwort:

b) Modell: Zwei Flugzeuge fliegen nach $P_1(t)$ = (0 | 0 | 8) + t · (6 | 8 | 0) und $P_2(t)$ = (12 | 9 | 7,5) + t · (2 | 5 | 0), t in Minuten, Koordinaten in km. Weise nach, dass die Bahnen windschief sind. Wann kommen sich die Flugzeuge am nächsten, und wie nah?

Antwort:

c) Eine Software gibt für den Schnittpunkt von g: $x = (1 \mid 0 \mid 2) + t \cdot (7 \mid 14 \mid 0)$ den Parameterwert $t \approx 0{,}4286$ an. Der exakte Wert ist ein einfacher Bruch. Bestimme ihn und gib den Schnittpunkt exakt an.

Antwort:

d) Gegeben sind A(2 | 0 | 1) und B(6 | 8 | 9). Liegen P(4 | 4 | 5) und Q(10 | 16 | 17) auf der Strecke AB?

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich stelle Geraden und Strecken in Parameterform dar.	☐	☐	☐
Ich deute Parameter im Sachkontext.	☐	☐	☐
Ich bestimme die Lage zweier Geraden und berechne Schnittpunkte.	☐	☐	☐
Ich nutze digitale Werkzeuge sinnvoll und prüfe ihre Ergebnisse.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Geraden, Richtungsvektoren und Punktprobe

1 **Gegeben ist g: x = (1 | 2 | 3) + t · (2 | –1 | 4). Berechne den Punkt für den Parameterwert t.**

a) t = 0: (1 | 2 | 3)

b) t = 1: (3 | 1 | 7)

c) t = 2: (5 | 0 | 11)

d) t = –1: (–1 | 3 | –1)

2 **Berechne den Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$.**

a) A(1 | 2 | 3), B(4 | 6 | 9): $\overrightarrow{AB}$ = (3 | 4 | 6)

b) A(0 | 1 | 2), B(2 | 5 | 8): $\overrightarrow{AB}$ = (2 | 4 | 6)

c) A(–1 | 0 | 4), B(3 | –2 | 1): $\overrightarrow{AB}$ = (4 | –2 | –3)

3 **Mache die Punktprobe für g: x = (1 | 2 | 3) + t · (2 | –1 | 4).**

a) **auf**

→ Alle drei Zeilen ergeben denselben Wert für t.

b) **nicht auf**

→ Die drei Zeilen ergeben verschiedene Werte für t.

c) **auf**

→ Alle drei Zeilen ergeben denselben Wert für t.

d) **nicht auf**

→ Die drei Zeilen ergeben verschiedene Werte für t.

4 **Strecke von A(0 | 0 | 0) nach B(6 | 3 | 9).**

a) Für t = $\frac{1}{3}$ ist der Punkt (2 | 1 | 3).

b) Für t = 0,5 ist der Punkt (3 | 1,5 | 4,5).

●●○ Standard: Strecken, Sachkontext, Lage und Schnittpunkt

5 **Strecke von A(1 | 2 | 3) nach B(5 | –2 | 7). Gib den Punkt an.**

a) t = 0,25: (2 | 1 | 4)

b) t = 0,5: (3 | 0 | 5)

c) t = 0,75: (4 | –1 | 6)

6 **Liegt der Punkt zum Parameterwert auf der Strecke AB?**

a) **auf**

→ Es gilt $0 \leq 0{,}5 \leq 1$.

b) **nicht auf**

→ Es gilt 1,5 > 1. Der Punkt liegt hinter B.

c) **nicht auf**

→ Es gilt t < 0. Der Punkt liegt hinter A.

d) **auf**

→ Für t = 1 ist es der Endpunkt B.

7 Modell: $x = (10 \mid 20 \mid 2) + t \cdot (4 \mid 0 \mid 3)$, t in Sekunden, Koordinaten in Metern.

a) Nach 2 s ist die Höhe 8 m.

b) Die Höhe 17 m wird nach 5 s erreicht.

c) Die Koordinate $x_1 = 50$ wird nach 10 s erreicht.

d) Das Tempo ist 5 m/s.

8 Bestimme den Faktor k.

a) $(2 \mid 4 \mid -2) = 2 \cdot (1 \mid 2 \mid -1)$

b) $(-3 \mid 6 \mid -9) = -3 \cdot (1 \mid -2 \mid 3)$

c) $(1{,}5 \mid 3 \mid 4{,}5) = 1{,}5 \cdot (1 \mid 2 \mid 3)$

9 Bestimme die Lage der Geraden g und h.

a) identisch

→ Die Richtungsvektoren sind kollinear, und der Stützpunkt von h liegt auf g.

b) echt parallel

→ Die Richtungsvektoren sind kollinear, aber der Stützpunkt von h liegt nicht auf g.

c) schneidend

→ Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear, und das System hat genau eine Lösung.

d) windschief

→ Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear, und das System hat keine Lösung.

10 Berechne t, s und den Schnittpunkt.

a) g: $x = (2 \mid 1 \mid 0) + t \cdot (1 \mid 1 \mid 2)$, h: $x = (0 \mid 3 \mid 4) + s \cdot (4 \mid 0 \mid 0)$: $t = 2$, $s = 1$, Schnittpunkt S(4 | 3 | 4)

b) g: $x = (1 \mid 0 \mid 2) + t \cdot (2 \mid 1 \mid 1)$, h: $x = (4 \mid 2 \mid 2) + s \cdot (1 \mid 0 \mid 2)$: $t = 2$, $s = 1$, Schnittpunkt S(5 | 2 | 4)

c) g: $x = (0 \mid 1 \mid 0) + t \cdot (1 \mid 1 \mid 2)$, h: $x = (1 \mid 2 \mid 3) + s \cdot (1 \mid 1 \mid 1)$: $t = 2$, $s = 1$, Schnittpunkt S(2 | 3 | 4)

11 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe ihn richtig auf.

a) Stimmt nicht. Richtig: Sie können auch windschief sein.

b) Stimmt.

c) Stimmt nicht. Richtig: Man verwendet $0 \leq t \leq 1$. Mit $t \geq 0$ erhält man eine Halbgerade.

d) Stimmt.

e) Stimmt nicht. Richtig: Der Richtungsvektor darf nicht der Nullvektor sein, sonst gäbe es nur einen Punkt.

●●● Plus: Probleme lösen

12 Teilpunkt einer Strecke. Der Punkt T teilt die Strecke von A(0 | 0 | 0) nach B(8 | 4 | 12) im Verhältnis 1 : 3 (vom Anfang aus gerechnet).

a) Der Parameterwert ist $t = 0{,}25$.

b) Der Punkt ist T(2 | 1 | 3).

13 Rechne und schreibe einen Antwortsatz.

a) Die Geraden sind windschief.

→ Die Richtungsvektoren (1 | 2 | –1) und (2 | 1 | 1) sind nicht kollinear.

→ Gleichsetzen: 1 + t = 2s, 2 + 2t = 3 + s, 3 – t = 2 + s.

→ Aus der ersten Zeile t = 2s – 1. In die zweite: 2 + 4s – 2 = 3 + s, also s = 1 und t = 1.

→ Dritte Zeile: 3 – 1 = 2, aber 2 + 1 = 3. Widerspruch. Die Geraden sind windschief.

b) Die Bahnen sind windschief. Nach 3 min ist der Abstand mit 0,5 km am kleinsten.

→ Die Richtungsvektoren (6 | 8 | 0) und (2 | 5 | 0) sind nicht kollinear (6 : 2 = 3, aber 8 : 5 = 1,6). Die Höhen 8 und 7,5 bleiben verschieden. Es gibt keinen gemeinsamen Punkt: windschief.

→ Differenzvektor: $w(t) = P_1(t) - P_2(t) = (4t - 12 \mid 3t - 9 \mid 0{,}5) = (4 \cdot (t - 3) \mid 3 \cdot (t - 3) \mid 0{,}5)$.

→ $|w(t)|^2 = 16 \cdot (t - 3)^2 + 9 \cdot (t - 3)^2 + 0{,}25 = 25 \cdot (t - 3)^2 + 0{,}25$.

→ Der Term ist für t = 3 am kleinsten und dann 0,25. Der Abstand ist $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ km.

c) $t = \frac{3}{7}$, Schnittpunkt (4 | 6 | 2)

→ 0,4286 ist etwa $\frac{3}{7}$, denn 3 : 7 = 0,428571....

→ $x = (1 + \frac{3}{7} \cdot 7 \mid 0 + \frac{3}{7} \cdot 14 \mid 2 + 0) = (1 + 3 \mid 6 \mid 2)$.

→ Der Schnittpunkt ist (4 | 6 | 2). Die Software hat nur gerundet angezeigt.

d) P liegt auf der Strecke (t = 0,5). Q liegt nur auf der Geraden (t = 2).

→ $\overrightarrow{AB} = (4 \mid 8 \mid 8)$.

→ P: 2 + 4t = 4, 8t = 4, 1 + 8t = 5 ergeben alle t = 0,5. Wegen $0 \leq 0{,}5 \leq 1$ liegt P auf der Strecke.

→ Q: 2 + 4t = 10, 8t = 16, 1 + 8t = 17 ergeben alle t = 2.

→ Wegen t = 2 > 1 liegt Q auf der Geraden hinter B, aber nicht auf der Strecke.