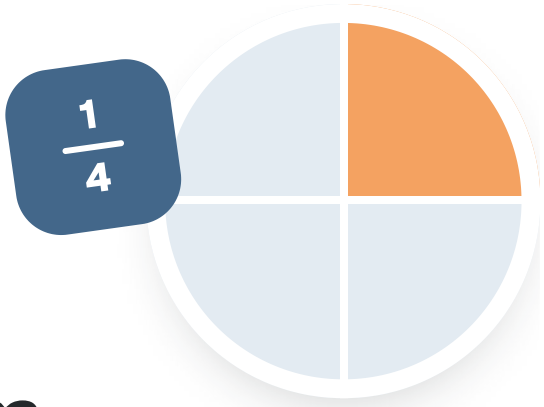
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 11

Vektoren im Raum

Erklärungen, 44 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich beschreibe Punkte und Körper im räumlichen Koordinatensystem.
- Ich berechne Vektoren, Längen und Abstände.
- Ich addiere und vervielfache Vektoren und prüfe auf Kollinearität.
- Ich weise Eigenschaften von Figuren mit Vektoren nach.

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-11/mathe/vektoren-im-raum/das-raeumliche-koordinatensystem

Kurz erklärt

Merksatz: Punkt P(x_1 | x_2 | x_3). Vektor $\overrightarrow{AB}$ = Ende minus Anfang. Länge $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Kollinear: $b = k \cdot a$. Auf deinem Blatt schreibst du Vektoren als Spalte: die drei Zahlen untereinander.

Wichtige Rechnungen

Was	Wie	Beispiel
Vektor $\overrightarrow{AB}$	B – A	A(1 | 2 | 3), B(4 | 6 | 9): (3 | 4 | 6)
Länge	quadrieren, addieren, Wurzel	$\|(2 \mid 3 \mid 6)\| = \sqrt{49} = 7$
Vielfaches	jede Zahl mit k malnehmen	$2 \cdot (1 \mid 0 \mid -3) = (2 \mid 0 \mid -6)$
Mittelpunkt	Mittelwerte	Mitte von (0 | 0 | 0) und (6 | 4 | 2): (3 | 2 | 1)

Abstand zweier Punkte

1. A(0 | 1 | 2), B(4 | 5 | 9).
2. $\overrightarrow{AB}$ = (4 | 4 | 7).
3. $16 + 16 + 49 = 81$, $|AB| = 9$.

Tipp: Schreibe die Rechnung in Zeilen auf: erst x_1, dann x_2, dann x_3. Mache die Probe: Quadriere das Ergebnis der Länge und vergleiche mit der Quadratsumme.

Typischer Fehler: Ende minus Anfang, nicht umgekehrt. Und bei der Länge die Zahlen erst quadrieren, dann addieren.

●○○ Basis

Punkte, Vektoren und Verschiebungen

1 Ergänze die Lücken.

a) In der x_1x_2-Ebene ist x_3 = _____.

b) Auf der x_1-Achse sind x_2 = _____ und x_3 = _____.

c) Der Punkt P(4 | 1 | 6) liegt _____ Einheiten über der x_1x_2-Ebene.

d) Der Fußpunkt von P(4 | 1 | 6) auf dem Fußboden ist (4 | 1 | _____).

e) Ein Quader mit den Kanten 4, 3 und 2 hat gegenüber dem Ursprung die Ecke F(
_____ | _____ | _____).

2 Kreuze an.

a) Der Punkt (2 | 5 | 0) liegt in der _____-Ebene. ☐ x_1x_2 ☐ x_1x_3 ☐ x_2x_3

b) Der Punkt (0 | 4 | 6) liegt in der _____-Ebene. ☐ x_1x_3 ☐ x_2x_3 ☐ x_1x_2

c) Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ wird als Ende _____ Anfang berechnet. ☐ **minus** ☐ **plus**

3 Berechne den Vektor $\overrightarrow{AB}$ (Ende minus Anfang).

a) A(1 | 2 | 3), B(4 | 6 | 9): $\overrightarrow{AB}$ = (_____ | _____ | _____)

b) A(2 | –1 | 4), B(5 | 3 | 1): $\overrightarrow{AB}$ = (_____ | _____ | _____)

c) A(–2 | 1 | 4), B(–2 | 1 | 7): $\overrightarrow{AB}$ = (_____ | _____ | _____)

d) A(3 | 1 | –2), B(5 | 4 | 2): $\overrightarrow{AB}$ = (_____ | _____ | _____)

4 Verschiebe den Punkt P mit dem Vektor v.

a) P(1 | 1 | 1), v = (2 | –3 | 4): P′(_____ | _____ | _____)

b) P(0 | 2 | –1), v = (–1 | 1 | 3): P′(_____ | _____ | _____)

c) P(4 | 0 | 5), v = (–4 | 2 | –5): P′(_____ | _____ | _____)

●●○ Standard

Länge, Rechnen und Bewegung

5 **Berechne die Länge des Vektors. Alle Ergebnisse sind ganze Zahlen.**

a) $|(2 \mid 3 \mid 6)| =$ _____

b) $|(1 \mid 2 \mid 2)| =$ _____

c) $|(4 \mid 4 \mid 7)| =$ _____

d) $|(-2 \mid -6 \mid -3)| =$ _____

6 **Berechne den Abstand der beiden Punkte.**

a) A(1 | 1 | 1), B(3 | 3 | 2): $|AB| =$ _____

b) A(–1 | 2 | 0), B(2 | –2 | 12): $|AB| =$ _____

c) A(2 | 0 | –1), B(2 | 4 | 2): $|AB| =$ _____

7 **Rechne mit a = (1 | –2 | 3) und b = (–2 | 0 | 4).**

a) a + b = (_____ | _____ | _____)

b) a – b = (_____ | _____ | _____)

c) 2a = (_____ | _____ | _____)

d) 3a – b = (_____ | _____ | _____)

8 **Eine Modell-Drohne startet bei S(0 | 0 | 10) und fliegt mit v = (4 | 3 | 1) m/s. Gib den Ort an.**

a) Nach 2 s: (_____ | _____ | _____)

b) Nach 10 s: (_____ | _____ | _____)

9 Sind die Vektoren kollinear?

a) (1 | 2 | 3) und (3 | 6 | 9) sind _____. ☐ **nicht kollinear** ☐ **kollinear**

b) (2 | −4 | 6) und (3 | −6 | 10) sind _____. ☐ **kollinear** ☐ **nicht kollinear**

c) (1 | 2 | 3) und (−2 | −4 | −6) sind _____. ☐ **nicht kollinear** ☐ **kollinear**

10 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe ihn richtig auf.

a) Der Vektor von A nach B wird als Anfang minus Ende berechnet. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

b) Die Länge des Vektors (3 | 4 | 0) ist 5. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

c) Die Länge des Vektors (3 | 4 | 0) ist 3 + 4 = 7. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

d) Der Geschwindigkeitsvektor sagt, an welchem Ort sich ein Körper befindet. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

e) Zwei Pfeile mit gleicher Länge und Richtung gehören zum selben Vektor. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

●●● Plus

Figuren und Anwendungen

11 Mittelpunkt und vierter Eckpunkt. Rechne nach.

a) Mittelpunkt von A(2 | −4 | 6) und B(8 | 2 | −2): M(_____ | _____ | _____)

b) Mittelpunkt von A(0 | 0 | 0) und B(6 | 4 | 2): M(_____ | _____ | _____)

c) ABCD ist ein Parallelogramm mit A(1 | 0 | 2), B(4 | 1 | 3), C(5 | 4 | 6): D(_____ | _____ | _____)

d) ABCD ist ein Parallelogramm mit A(0 | 0 | 0), B(4 | 1 | 2), C(5 | 5 | 3): D(_____ | _____ | _____)

12 Rechne und schreibe einen Antwortsatz.

a) Gegeben sind A(2 | 0 | 1), B(5 | 1 | 3), C(6 | 4 | 6) und D(3 | 3 | 4). Weise nach, dass ABCD ein Parallelogramm ist. Ist es eine Raute?

Antwort:

b) Gegeben sind A(1 | 1 | 1), B(3 | 3 | 2) und C(3 | 0 | –1). Zeige, dass das Dreieck bei A einen rechten Winkel hat.

Antwort:

c) Eine Halle ist 12 m lang, 4 m breit und 3 m hoch. Eine Ecke des Bodens liegt im Ursprung, die Kanten laufen entlang der positiven Achsen. Ein Kabel soll von O zur gegenüberliegenden Deckenecke gespannt werden. Wie lang ist es?

Antwort:

d) Ein Modell-Flugkörper startet bei (0 | 0 | 20) und fliegt mit v = (3 | 4 | 12) m/s. Welches Tempo hat er? Wann ist er auf 80 m Höhe, und wo ist er dann?

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich beschreibe Punkte und Körper im räumlichen Koordinatensystem.	☐	☐	☐
Ich berechne Vektoren, Längen und Abstände.	☐	☐	☐
Ich addiere und vervielfache Vektoren und prüfe auf Kollinearität.	☐	☐	☐
Ich weise Eigenschaften von Figuren mit Vektoren nach.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Punkte, Vektoren und Verschiebungen

1 **Ergänze die Lücken.**

a) In der x_1x_2-Ebene ist $x_3 = 0$.

b) Auf der x_1-Achse sind $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$.

c) Der Punkt P(4 | 1 | 6) liegt 6 Einheiten über der x_1x_2-Ebene.

d) Der Fußpunkt von P(4 | 1 | 6) auf dem Fußboden ist (4 | 1 | 0).

e) Ein Quader mit den Kanten 4, 3 und 2 hat gegenüber dem Ursprung die Ecke F(4 | 3 | 2).

2 **Kreuze an.**

a) x_1x_2

→ Die dritte Koordinate ist 0.

b) x_2x_3

→ Die erste Koordinate ist 0.

c) minus

→ $\overrightarrow{AB} = B - A$, also Ende minus Anfang.

3 **Berechne den Vektor $\overrightarrow{AB}$ (Ende minus Anfang).**

a) A(1 | 2 | 3), B(4 | 6 | 9): $\overrightarrow{AB} = (3 \mid 4 \mid 6)$

b) A(2 | −1 | 4), B(5 | 3 | 1): $\overrightarrow{AB} = (3 \mid 4 \mid -3)$

c) A(−2 | 1 | 4), B(−2 | 1 | 7): $\overrightarrow{AB} = (0 \mid 0 \mid 3)$

d) A(3 | 1 | −2), B(5 | 4 | 2): $\overrightarrow{AB} = (2 \mid 3 \mid 4)$

4 **Verschiebe den Punkt P mit dem Vektor v.**

a) P(1 | 1 | 1), v = (2 | −3 | 4): P′(3 | −2 | 5)

b) P(0 | 2 | −1), v = (−1 | 1 | 3): P′(−1 | 3 | 2)

c) P(4 | 0 | 5), v = (−4 | 2 | −5): P′(0 | 2 | 0)

●●○ Standard: Länge, Rechnen und Bewegung

5 **Berechne die Länge des Vektors. Alle Ergebnisse sind ganze Zahlen.**

a) $|(2 \mid 3 \mid 6)| = 7$

b) $|(1 \mid 2 \mid 2)| = 3$

c) $|(4 \mid 4 \mid 7)| = 9$

d) $|(-2 \mid -6 \mid -3)| = 7$

6 **Berechne den Abstand der beiden Punkte.**

a) **A(1 | 1 | 1), B(3 | 3 | 2): |AB| = 3**

b) **A(–1 | 2 | 0), B(2 | –2 | 12): |AB| = 13**

c) **A(2 | 0 | –1), B(2 | 4 | 2): |AB| = 5**

7 **Rechne mit a = (1 | –2 | 3) und b = (–2 | 0 | 4).**

a) **a + b = (–1 | –2 | 7)**

b) **a – b = (3 | –2 | –1)**

c) **2a = (2 | –4 | 6)**

d) **3a – b = (5 | –6 | 5)**

8 **Eine Modell-Drohne startet bei S(0 | 0 | 10) und fliegt mit v = (4 | 3 | 1) m/s. Gib den Ort an.**

a) **Nach 2 s: (8 | 6 | 12)**

b) **Nach 10 s: (40 | 30 | 20)**

9 **Sind die Vektoren kollinear?**

a) **kollinear**

→ Es ist (3 | 6 | 9) = 3 · (1 | 2 | 3).

b) **nicht kollinear**

→ Der Faktor 1,5 passt bei den ersten zwei Zahlen, aber 6 · 1,5 = 9 und nicht 10.

c) **kollinear**

→ Es ist (–2 | –4 | –6) = –2 · (1 | 2 | 3).

10 **Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe ihn richtig auf.**

a) **Stimmt nicht. Richtig: Man rechnet Ende minus Anfang: $\overrightarrow{AB} = B - A$.**

b) **Stimmt.**

c) **Stimmt nicht. Richtig: Die Länge ist $\sqrt{(9 + 16 + 0)} = 5$. Man muss quadrieren, addieren und die Wurzel ziehen.**

d) **Stimmt nicht. Richtig: Er sagt, wie sich der Ort pro Zeiteinheit ändert.**

e) **Stimmt.**

●●● Plus: Figuren und Anwendungen

11 **Mittelpunkt und vierter Eckpunkt. Rechne nach.**

a) **Mittelpunkt von A(2 | –4 | 6) und B(8 | 2 | –2): M(5 | –1 | 2)**

b) **Mittelpunkt von A(0 | 0 | 0) und B(6 | 4 | 2): M(3 | 2 | 1)**

c) **ABCD ist ein Parallelogramm mit A(1 | 0 | 2), B(4 | 1 | 3), C(5 | 4 | 6): D(2 | 3 | 5)**

d) **ABCD ist ein Parallelogramm mit A(0 | 0 | 0), B(4 | 1 | 2), C(5 | 5 | 3): D(1 | 4 | 1)**

12 **Rechne und schreibe einen Antwortsatz.**

a) **Es ist $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (3 \mid 1 \mid 2)$. ABCD ist ein Parallelogramm, aber keine Raute.**

→ $\overrightarrow{AB} = (5 - 2 \mid 1 - 0 \mid 3 - 1) = (3 \mid 1 \mid 2)$.

→ $\overrightarrow{DC} = (6 - 3 \mid 4 - 3 \mid 6 - 4) = (3 \mid 1 \mid 2)$. Also $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

→ $|AB|^2 = 9 + 1 + 4 = 14$. $\overrightarrow{AD} = (1 \mid 3 \mid 3)$, $|AD|^2 = 1 + 9 + 9 = 19$.

→ Die Seiten AB und AD sind verschieden lang. Es ist keine Raute.

b) **Es gilt $|AB|^2 + |AC|^2 = 9 + 9 = 18 = |BC|^2$. Der Winkel bei A ist ein rechter.**

→ $\overrightarrow{AB} = (2 \mid 2 \mid 1)$, $|AB|^2 = 4 + 4 + 1 = 9$.

→ $\overrightarrow{AC} = (2 \mid -1 \mid -2)$, $|AC|^2 = 4 + 1 + 4 = 9$.

→ $\overrightarrow{BC} = (0 \mid -3 \mid -3)$, $|BC|^2 = 0 + 9 + 9 = 18$.

→ $|AB|^2 + |AC|^2 = 18 = |BC|^2$. Nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras ist der Winkel bei A ein rechter. Das Dreieck ist auch gleichschenklig.

c) **13 m**

→ Die Deckenecke ist F(12 | 4 | 3).

→ $\overrightarrow{OF} = (12 \mid 4 \mid 3)$.

→ $|OF|^2 = 144 + 16 + 9 = 169$.

→ $|OF| = 13$. Das Kabel ist 13 m lang.

d) **Tempo 13 m/s; nach 5 s bei (15 | 20 | 80)**

→ Tempo: $9 + 16 + 144 = 169$, also 13 m/s.

→ Höhe: $20 + 12t = 80$, also $t = 5$ s.

→ Ort: $(0 + 15 \mid 0 + 20 \mid 20 + 60) = (15 \mid 20 \mid 80)$.